

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

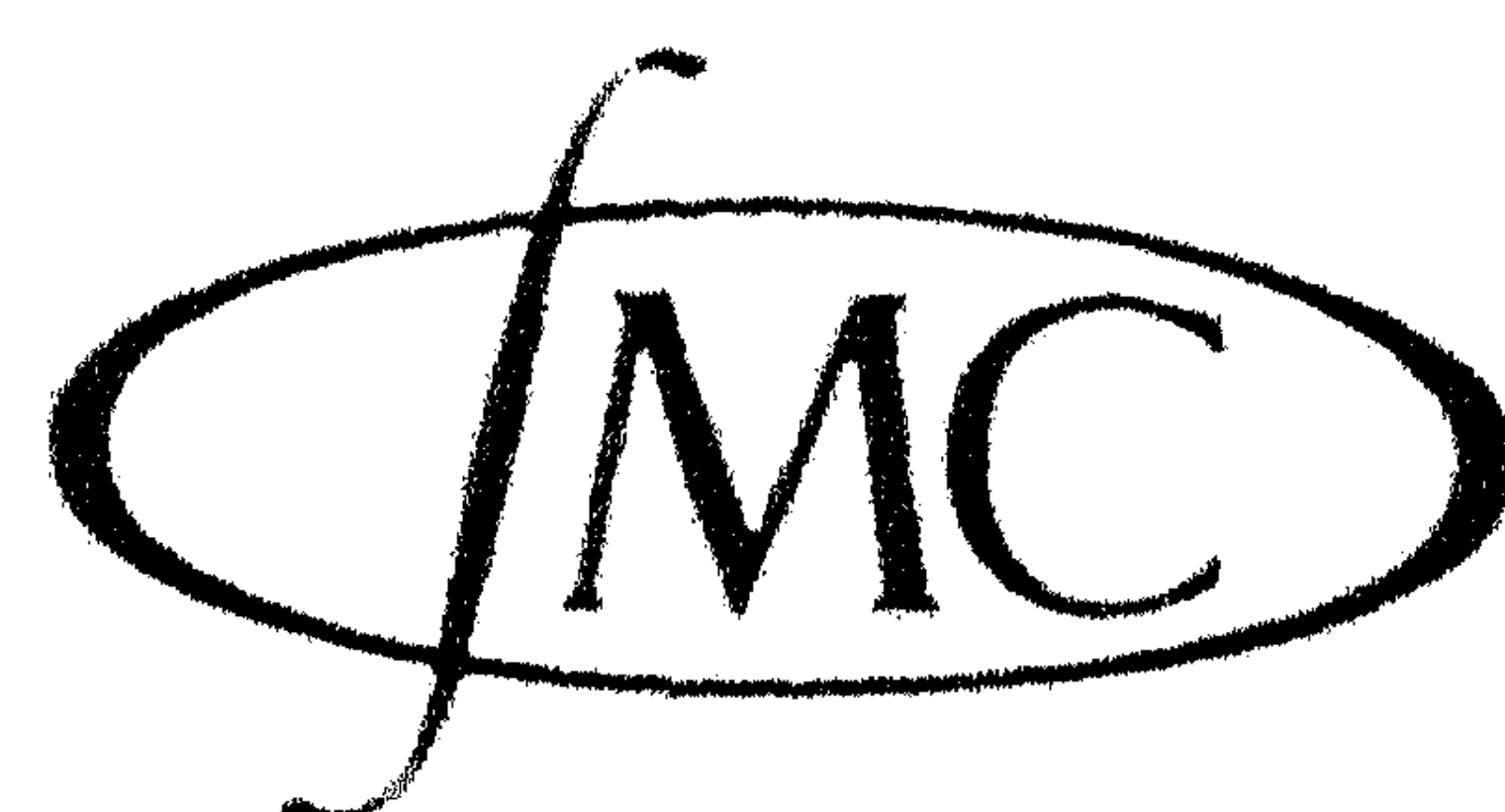
REKENAFDELING

R 190

Over de numerieke oplossing van een zekere
integraalvergelijking.

door

M.L. Potters.



[1952]

Over de numerieke oplossing van een zekere integraalvergelijking.

M.L. Potters.

1. Gevraagd zij de functie $p(t)$ op te lossen uit de volgende integraalvergelijking

$$F(p, t) = \int_{t_0}^t \frac{dp(\tau)}{d\tau} Q(t-\tau) d\tau \quad (1,1)$$

Van $F(p, t)$ is de analytische uitdrukking gegeven, terwijl $Q(t)$ in tabelvorm bekend is. Er geldt $Q(0) = 0$.

Berekend worden de functiewaarden $p_i = p(t_i)$ voor $i = 0, 1, 2, \dots$, waarbij de punten t_i aequidistant zijn. Noem $t_i - t_{i-1} = \Delta t$.

Hiervoor worden twee methoden aangegeven, welke beide gebruik maken van de integratieformule van Gregory met verwaarlozing van de tweede differentie:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_1} f(\tau, t_1) d\tau &= \sum_{j=2}^{1-2} f(t_j, t_1) + \\ &+ \frac{5}{12} \left\{ f(t_0, t_1) + f(t_1, t_1) \right\} + \frac{13}{12} \left\{ f(t_1, t_1) + f(t_{1-1}, t_1) \right\} \quad (1,2) \end{aligned}$$

2. De eerste methode volgt uit directe toepassing van (1,2) op (1,1). De afgeleide $\frac{dp}{d\tau}$ wordt benaderd volgens

$$\Delta t \cdot \left\{ \frac{dp(\tau)}{d\tau} \right\}_{\tau=t_1} = \frac{1}{2} (p_{1+1} - p_{1-1}) \quad (2,1)$$

Substitutie van $f(\tau, t_1) = \frac{dp(\tau)}{d\tau} Q(t_1 - \tau)$ in (1,4) levert, met (2,1)

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \frac{dp(\tau)}{d\tau} Q(t_1 - \tau) d\tau &= \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{1-2} (p_{1+1} - p_{1-1}) Q(t_1 - t_j) + \\ &+ \frac{5}{12} \left\{ \frac{dp(\tau)}{d\tau} \right\}_{\tau=t_0} Q(t_1 - t_0) \Delta t + \frac{5}{12} \left\{ \frac{dp(\tau)}{d\tau} \right\}_{\tau=t_1} Q(0) \cdot \Delta t + \\ &+ \frac{13}{24} \left\{ (p_2 - p_0) Q(t_1 - t_1) + (p_1 - p_{1-2}) Q(\Delta t) \right\}. \quad (2,2) \end{aligned}$$

Zij nu de functie $p(t)$ bekend tot en met p_{1-1} , dan volgt uit (1,1) en (2,2) een vergelijking voor p_1 van de gedaante

$$F(p_1, t_1) = \alpha p_1 + \beta_1 \quad (2,3)$$

waarin $\alpha = \frac{13}{24} Q(\Delta t)$

$$\beta_1 = \frac{5}{12} \left\{ \frac{dp(\tau)}{d\tau} \right\}_{\tau=t_0} Q(t_1-t_0) \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{1-2} (p_{j+1}-p_{j-1}) Q(t_1-t_j) + \\ + \frac{13}{24} \left\{ (p_2-p_0) Q(t_1-t_1) - p_{1-2} Q(\Delta t) \right\}.$$

De beginwaarden p_0 en $\left\{ \frac{dp}{d\tau} \right\}_{\tau=t_0}$ volgen uit (1,1) door substitutie van t_0 resp. differentiatie naar t en substitutie van t_0 .

$$f(p_0, t_0) = 0 \quad (2,4a)$$

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial p} \right\}_{p=p_0, t=t_0} \left\{ \frac{dp}{dt} \right\}_{t=t_0} + \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} \right\}_{p=p_0, t=t_0} = 0 \quad (2,4b)$$

3. Volgens de tweede methode wordt (1,1) eerst partieel geïntegreerd:

$$F(p, t) = -p_0 Q(t-t_0) + \int_{t_0}^t p(\tau) Q'(t-\tau) d\tau \quad (3,1)$$

Substitutie van $f(\tau, t_1) = p(\tau) Q'(t_1-\tau)$ in (1,4) levert nu op soortgelijke wijze als in het voorgaande een vergelijking voor p_1 :

$$F(p_1, t_1) = a p_1 + b_1 \quad (3,2)$$

waarin $a = \frac{5}{12} Q'(0) \cdot \Delta t$

$$b_1 = -p_0 Q(t_1-t_0) + \\ + \left[\frac{5}{12} p_0 Q'(t_1-t_0) + \sum_{j=2}^{1-2} p_j Q'(t_1-t_j) + \right. \\ \left. + \frac{13}{12} \left\{ p_1 Q'(t_1-t_1) + p_{1-1} Q'(\Delta t) \right\} \right] \cdot \Delta t.$$

4. De vergelijkingen (2,3) resp. (3,2) kunnen langs iteratieve weg opgelost worden. Definieert men n.l. de getallenrij

$$p_1^{(n)} = \frac{p\{p_1^{(n-1)}, t_1\} - \beta_1}{\alpha} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (4,1)$$

dan zal bij geschikte keuze van $p_1^{(0)}$ deze rij naar de gevraagde oplossing p_1 van (2,3) convergeren.